はじめに

数学という学問は，古く紀元前に遡ります．エジプトやメソポタミアでは，耕地の測定，治水工事，大建造物の建設などの必要から数学（幾何学）が発達し，また農産物の周期をはかるために進法（６０進法など）が生み出されました．数とは何か？数えるとは何なのか？なぜ一つのものを右と左に並べて二と数えて良いものか …？それからの時代も，数に対する人間の探求心は真理の追究という形で発展を遂げ，現在に至ります．
さて，突然ですが，さっそく次の問題を解いてみましょう．

【設問】３人の女神が口論をしている．もっとも美しい女神はただ１人である．

アテナ 「もっとも美しいのはアフロディテではない」

アフロディテ 「もっとも美しいのはヘラではない」

ヘラ 「わたしがもっとも美しい」

もっとも美しい女神のみが真実を述べている．それは誰か．
（'04 慶應義塾大 SFC 数学入試問題）

これが数学の問題？と思うでしょう．しかし，まずもって数学以外にこの形式の出題は考えられません．それは，数学が「論理学」としての性格を持ち合わせているからです．この慶應大の問題は，数字を扱うことばかりを数学と考えて，こうした論理の世界を軽視してしまうような若者たいする警告なのかもしれません．数学を学習する上で，重要になるのが，「概念」と「論理」です．またそれらを正確に使いこなす「厳密性」が必要となります．「13 という数字はどんなものなのか（１が１３個集まったもの？それとも？）」，「実数とは？」これが概念となります．数学における言葉とも言うべきものです．それに対して，これらの言葉を駆使して，一つの真理を探求していく過程・道筋というべきもの，これが論理です．例えば，「(a) 金はダイヤより安い，(b) 銀もダイヤより安い．従って (c) 銀は金より安い．」この文章は，真理を言っているような気がします．しかし，実際には真理ではないのです．なぜなら，論理が破綻しているからです．金と銀の比較はこの文章からだけでは読みとれません．金もダイヤも銀も知らない人に，この文章で説得が出来るように論理を組み立てなくてはなりません．そんなの当たり前じゃん，

とか，それっぽいからとかいうのは基本的には認められません．正確に，かつ簡潔に，わかりやすく．これから数学を勉強していく上で，これらのことは必ず留意しておいてください．

1　論証の世界へ

高校の数学の教科書では，論証は一つの分野としてほかのところと切り離して論じられています．しかし，いくら教科書通りに論証を学んだところで，残念ながら論証の力は培えません．論証力無くして，得点無し．合格無し．じっくりと腰を据えて論証と対峙していきます．

そもそも高校の数学に入ってまずもってやらなければならないことは，やはり数学の文法を学んでもらうことです．英語でも古典でもまず文法から入るはずです．数と式の知識さえあれば基本的に大丈夫ですが，複数の分野をまたいで論じることになります．教科書に載っていないが，受験では常識となっているものも積極的に取り上げていきますので，頑張っていきましょう．

2　数学の基礎文法 1

2.1　定義と定理

まず，定義と定理の話から始めます．定義とはなんでしょうか．次の中からあなたが定義であると思うものを選んでみてください．

a) 我々が住んでいる国は日本という．

b) 1 以上の整数を自然数という．

c) 円周率を π と書く．

d) 円周率は無理数である．

e) 日本の首相は小泉純一郎である．

f) 日本の主権は国民にある．

これまで，割とあいまいに「定義」とか「定理」とかいう言葉を使ってきたと思います．しかし，これからは厳密に区別する必要があります．

2.1.1　定義:definition

手元の辞書をめくれば，**「ある概念や言葉の意味・内容を正しくはっきり定めること．また，決めたもの.」**数学の世界においても，そのとおりです．言葉の意味などは，まさにその通りです.「b) 1以上の整数を自然数という」をはじめ，歯を磨くブラシを歯ブラシという，とか我々が住んでいる星を地球という，というのは定義に当たります．数学においては,「公理」という言葉とセットでよく用いられます．例えば，１＋１＝２というように証明抜きで真理であると決められたものが公理です．常に我々はこの定義と公理に基づいて思考を開始することになります.

2.1.2　定理:theorem

辞書によれば，**「公理や定義によって正しいと証明されている一定の理論」**とあります．つまり,「d) 円周率は無理数である」は調べないとわかりませんので，定理ということになります.

2.2　命題

次の文章を考察します.

- 6は3の倍数である.
- ２と3の和は5に等しい.
- タマちゃんはゴマアザラシである.
- 円周率は無理数である.
- $\sqrt{2}$は4より大きい.
- キティはネズミである.

この中の文章には，正しいことを言っているものもあれば，間違っているものもあります．これらの文のように，**【定義】正しいか，正しくないかが定まっている文を命題といいます**．つまり，文章が正しいか正しくないかにかかわらず,「Aは Bであると言い切る」かたちの文章です.

2.2.1　命題の真偽

命題が正しいか，正しくないかについてみていきましょう．命題が正しいとき，その命題は**真**であるといいます．あるいは「成り立つ」ということもあります．逆

に，命題が正しくないときは**偽**であるといい，成り立たないということもあります．例えば，先ほどの文章に従えば,「タマちゃんはゴマアザラシである」は真ですし,「$\sqrt{2}$ は 4 より大きい.」は偽となります．今までの文章は,「２と３の和は５に等しい」という形でかかれていましたが，これは式で書いても文章と見なします.「$2+3=5$」．当然真です.

2.2.2　真偽を論じる

次のような問題にチャレンジしましょう.
【設問１】次の命題の真偽を言え.

(1) 4 の 3 倍は 12 である.

(2) 連続する２つの整数の積は偶数である.

(3) 連続する３つの整数は４で割り切れる.

基本的には，真偽を論じる際には，なぜ真なのか，なぜ偽となるのかの根拠を示さなくてはなりません．根拠を「論理的」に説明できてこそ，初めて真偽の議論が意味を持ちますし，このような問題を解くときは，この根拠が不明確だと得点がありません．ただし，さきほど公理としてかたづけた「$1+1=2$」という小学１年生でもわかる命題が真であることを本気で説明するとなると，高校のレベルをはるかに超えた議論が必要となります．どの程度説明が必要かどうかはこれから数学を学習していく中でそのさじ加減を体得していけばよく，この時点で気にする必要はありません．設問の (1) が真であることは，ここでは「明らか」として片づけておきましょう.

(2) これは真です．その根拠をどのように説明すればよいでしょうか.

さて，では (3)．どうもこれは嘘っぽいです．例えば，４，５，６では OK ですが $\cdots$．命題が真であることを示すためには，(2) のように**証明が必要**です．(3) のように偽であることを示すのは簡単で，**その命題が成り立たない場合を一つでも書いておけば良い**のです．成り立たないことがあるということは偽に他ならないわけです．このように，偽を示す際の「成り立たない例」のことを**反例**とよびます．したがって，(3) は反例として７，８，９とでもあげておけば良いでしょう．よって偽です.

2.3　条件

真偽のほどが明確な命題に対し，真偽のほどが明確でなく，**【定義】ある一定の値や状況が与えられたときに命題となるものを「条件」**といいます．つまり，次のようなものはすべて条件です．

- $2x > x + 3$
- $a^2 > b^2$
- x が自然数
- A さんは高校生である

文章の中に不確定なもの（変数であったり，A さんであったり）があり，それに何かしらの値やモノが代入されて初めてそれは命題となりうる，つまり真偽のほどがはっきりするわけです．例えば，A さんに自分の父親でも入れてみればはっきりそれは偽であると言い切れるでしょう．数学では，この条件を頻繁に用いて議論を進めていきます．

2.3.1　同値であること

さて，次のような 3 つの条件が与えられたとします．

A: $5x > 3x + 4$

B: $2x > 4$

C: $x > 2$

さて，これらの条件を見比べてみましょう．条件が真の命題となるような変数 x たちは，みな同じであることに気づくでしょう．このように，**それぞれの条件を成り立たせるような変数（あるいは状況）が一致するとき，それらの条件は同値**であるといい，次のように両矢印（$\Leftrightarrow$）を使って結びつけて書きます．

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$$

条件と名付けられているものの，これらの条件は，順を追えば不等式 $5x > 3x + 4$ を解いていることに変わりありません．このように，同値になるように条件を変形させていく作業（同値変形）の連続が，方程式や不等式を解くという作業であるとみなすこともできます．

A': $6x = 2x + 4$

B': $4x = 4$

C': $x = 1$

いずれも同値変形です．

2.3.2　同値変形かどうか

さて，式を変形させて方程式や不等式を解いていく際に，この同値関係を意識することは非常に重要です．次の問題を解いてみましょう．
【問い】つぎの誤りを指摘し，その理由を述べよ．

$$
\begin{array}{rcl}
\multicolumn{3}{l}{\text{すべての実数}\,x\,\text{について，}} \\
x(x-x) & = & x^2 - x^2 \\
\Leftrightarrow x(x-x) & = & (x+x)(x-x) \\
\Leftrightarrow x & = & (x+x) \\
\Leftrightarrow x & = & 0
\end{array}
$$

よってすべての実数は 0 である???

これまでそういうことに対して，きちんと注意を払ってこれた人はすぐに誤りに気づくはずです．分数を含む不等式などにおいて，両辺に何かを掛ける場合などにも，こうした同値関係への注意を払うことが肝要です．

2.4　条件を組み合わせて命題を作る

さて，次のような文章を考察してみます．

ア: $x > 2$ ならば, $x^2 > 4$ である

イ: $x^2 > 4$ ならば, $x > 2$ である

このように，”ならば”を使って二つの条件を結びつけ，命題を作ることが出来ます．文章アもイも真偽がはっきりとしています（真偽を言え）．この”ならば”，というのを矢印（$\Rightarrow$ あるいは $\Leftarrow$）を用いて次のように表します．

$$
\begin{array}{r}
A\,\text{ならば}\mathrm{B}\text{であるということ, つまり} \\
A \Rightarrow B \\
B \Leftarrow A
\end{array}
$$

矢印のむきにはくれぐれも注意してください．

2.5　”すべて”の命題

例えば，次のような問題を二次関数で解いたことがあると思います.「すべての x について, 二次不等式 $x^2 - ax + b > 0$ であるための条件を求めよ.」これを解くと，次のようになります．

$$\text{判別式}\, D = a^2 - 4b > 0.$$

つまり，書き換えると，

すべてのxについて, 二次不等式$x^2-ax+b>0$であるならば, $D=a^2-4b>0$.

このように,「すべてのxについて」という条件付きのもとで「命題」を定義する場合があります．その場合は，その命題の前にある前提条件に注意を払う必要があります（前提条件抜きには命題は成り立ち得ません.）

2.6　必要条件と十分条件

さっそく定義から．
【定義】A，B を条件とする．命題 A⇒B がなりたつとき，条件 A は条件 B の**十分条件**であるという．また，そのとき，B は A の**必要条件**であるという．
つまり，

《十分条件》⇒《必要条件》

です．ここがややこしいところです．もともと英語だったわけですが，英語でもよくわからない．そのわからない英語をさらにわからない日本語に無理矢理訳してしまったので本気でわけがわからなくなって … 被害者は受験生．なにが十分でなにが必要？教科書にはこれだけしか書いてなく，さっぱりわかりません．
例えば，次のような命題があったとします．

高校生である ⇒ 学生である

上述の語法に従えば，高校生であることは，学生であることの十分条件で，学生であることは高校生であることの必要条件です．つまり，ある人が高校生であるというだけで，その人が学生であることは十分に説明がつくわけです（十分に満たされている条件；sufficient condition）．しかし，学生であるというだけでは，その人が高校生であると断言することはできません．その可能性として「学生である」という条件は必要ですが，十分な説明になっていません（必要条件；necessary condition , requirement）．
ややこしいですね．使っていくうちに覚えますが，とりあえずは邪道だけど次のような覚え方があります．

A さんは B さんにただならぬ恨みがある.
ある日, A は B をナイフで刺した.
A ⇒（グサリ）B
B は「ギャー! 手当が必要だ〜!」(必要条件)
A は「恨みは晴らしたぜ, もう十分だ･･･」(十分条件)

はやくこの邪道から卒業してください（笑）.

2.6.1　必要十分条件

次の文章はどうでしょうか．

A: $5x > 3x + 4$

B: $x > 2$

これらの条件に対して，

$$\text{A} \Rightarrow \text{B}$$
$$\text{A} \Leftarrow \text{B}$$

つまり，お互いが必要条件であり，十分条件である場合です．これを，A を B の必要十分条件であり，B は A の必要十分条件であると言い表します．このことは，すなわち**同値関係を意味します**．

3　数学の基礎文法２：国語編

さて，これからは国語の話です．適切に日本語を理解できているかをここで検証します．

3.1　接続詞

つぎのような接続詞がよく用いられます．なお，記号を使って省略することがしばしばあります（どんどん使いましょう）．

1. **ゆえに・よって・従って**：結論などを導くときに使います．「A である．ゆえに，Bである．」記号∴はご存じの通りです．
2. **なぜならば・なぜなら**：根拠や理由を示します．「Aである．なぜならば，Bである．」記号は∵を使います．
3. **仮定する・〜とすると**：仮定をおくときに使います．「Aとすると，Bである．」
4. **〜にほかならない・つまり〜**：言い換えです．「$2 \times x = 2x$, つまり偶数．」
5. **必要十分である・同値である**：同値であることを表します．「AはBについて必要十分である．」「AとBは同値である．」

このような言葉を適切に使い，スマートな答案作りに心がけましょう．単に数式だけが並んでいたり，微妙な表現があったりする答案はほとんど点数をくれません．

3.2　形容詞的表現

「おのおのの x について」，と「すべての x について」と「任意の x について」どれがどう違うのでしょうか．英語を日本語訳して若干わかりにくくなっていますが，英語を書き並べておきましたので，ニュアンスをつかんでおいてください．基本的には，どれも同じような意味です．

すべての・いかなる (all)

任意の・勝手な (any , abitrary)

おのおのの (each)

つねに (identically)

ただし，**適当な・ある** (suitable) に関しては，区別してください．ここでいう適当は,「ふさわしい，適切な」という意味であり，無作為に，テキトーに，というニュアンスはありません.「ある x について，不等式 $f(x) > 0$ が成立する」といわれたら，$f(x) > 0$ を満たすような x が探せば存在する ということになります．成立するように探し出されたもの，ということは適切（適当）なものだ，と言い換えることもできます．

3.3　「かつ」と「または」

「A かつ B」と「A または B」の区別は重要です.「かつ (and)」は A も B もいずれも欠くことが出来ません．それに対して,「または (or)」は A か B のどちらかがあればよいのです（もちろん両方でも OK）．使い分けましょう．

4　練習問題

I.　真偽を判定せよ．なお，偽のものについては反例を与えよ（真の証明は不要）．

(1) 実数 a, b について, $a > b > 0$ ならば $a^2 > b^2$.

(2) $a^2 > 5$ ならば $a > 1$.

(3) n は 24 で割ると 1 余る自然数 $\Rightarrow$ n は奇数

(4) $x + y > 0 \Rightarrow x > 0$ かつ $y > 0$

II.　必要条件か，十分条件か，必要十分条件か，それともいずれでもないかを判定せよ．

(3) $a > 0$ かつ $b > 0$ であることは, $a + b > 0$ かつ $ab > 0$ であるための $\cdots$

(4) $a^2+b^2=0$ であることは, $ab=0$ であるための$\cdots$

(5) 整数 n について, n が 18 の倍数であることは n^2が 18 の倍数であるための$\cdots$

(6) $x^2-3x-4=0$ であることは, $x=4$ であるための$\cdots$

（いずれもセンター試験）

III.　必要条件か，十分条件か，必要十分条件か，それともいずれでもないかを判定せよ．

(7) 四角形が平行四辺形であることは，対角線がおのおのの中点で交わることの…

(8) 四角形のすべての角が９０度であることは，その四角形が正方形であるための …

(9) △ABC が二等辺三角形であることは，∠A= ∠B であるための …

(10) $x>3$ は $1<x<4$ であるための$\cdots$

IV.　1,2,3 番の人が面接を受けている．いつも真実を述べるのは一人だけで，他の二人は必ず嘘をつく．

１番の発言「２番の人は嘘つきです.」

これより，嘘つきであることが確定する人は, (　　) 番である．
（'04 慶應大環境情報）

5　方程式・恒等式という概念

さて，さっそく定義から入ります．【定義】ある文字にいかなる値を代入しても，常に成り立つ等式をその文字についての恒等式といいます．例えば，以下は x についての恒等式です．

$$x(x-x)=(x+x)(x-x)$$

どんな x を代入しようと，等号関係は崩れないことが確認できます．実際に恒等式を扱う上で，次の二つの性質は重要です．(恒等式であることと，次の 3 つの性質が成立することは「必要十分」です．)

$f(x)=g(x)$ が x について**恒等式である**ならば,

(1) $f(x), g(x)$ は次数が等しく, 同じ次数の項の係数は等しい．

(2) $f(x), g(x)$ は式を変形することで一方から他方が導かれる．

(3) $f(x), g(x)$ が n 次式と仮定し, $f(x)=g(x)$ が異なる $n+1$ 個の x について成り立つならば, この等式は恒等式である．

さて，これらの定理を証明する上で，代数学の基本定理というものが必要となります．
【代数学の基本定理】

この証明は高校の範囲を超えますので，公理としておきます．
さて，この事実を用いて，何が言えるのでしょうか．次の「x についての等式」について検証します．

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+(a_2-b_2)x^{n-2}+\cdots\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})x+(a_n-b_n)=0$$

さて，これが方程式であると仮定すると，それを満たす x はたかだか n 個に限定されます（重解も考え得る）．しかし，これがもし，異なる n 個以上の x について成立するとなると, この式が成立するには係数がすべて 0 にならなくてはなりません．

→ 係数が 0 になることの n 次での証明も高校の範囲を超えるため, 二次式で証明をしてみましょう．

【設題】整式 $ax^2 + bx + c = 0$ が x の相違なる p, q, r に対して 0 となるならば , $a = b = c = 0$ であることを証明せよ.

これが，恒等式と呼ばれるもので，(3) の事実にほかなりません．また，この事実より，(1) は容易に導くことが出来ます．これらの事実を，次の例をもってまとめにかえます.

早速恒等式の問題を解いてみます．
【設問】次の等式が x についての恒等式となるように，それぞれ【】のなかの定数を定めよ．

- $ax^2 + (b+c)x + c + a = 3x^2 + 4x$ 【a, b, c】

- $ax(x-1) + b(x-1)(x+1) + cx(x+1) = x^2 - 4x - 3$ 【a, b, c】

- $x^3 + 1 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 【a, b, c】

実際問題を解く上で，言うべきことは次の二つに要約できます．
1. **係数を比較する．**
2. **求める文字の数だけ適当な数字を代入する．**

※ただし，2 の方法を使うときは，かならずそれが本当に恒等式となるかの「確認」が必要．
Why?

6　応用問題

１．次の式が任意の k について成り立つように x, y の値を定めよ．

(1) $y - 3 = k(x+2)$

(2) $(3k+2)x - (2k-1)y - 8k - 3 = 0$

２．任意の実数 x, y について，次の等式が成り立つように定数 a, b, c の値を定めよ．

(1) $a(x+y)^2 + b(x-y)^2 = 2x^2 + cy^2$

(2) $2x^2 + axy + by + c = (x+1)(2x-3y+c)$

３．次の等式が x についての恒等式となるように定数 a, b, c の値を定めよ．

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

さて，先ほどの１．の問題ですが，それぞれの式は次のように解釈することが可能です.

この図形的な考察は，あとあとかなり生きてきます（定点公式と呼んだりします）．次のようにこの問題が書き換えられることがよくあります.

$y-3=k(x+2)$ **が常に通る点を求めよ.**

常に通る，ということは 傾き k がどうであれ必ず通る点がある，ということです.
図形的な分野からもこうして恒等式の考え方を使うことはよくあります.
では，最後にガツンと入試レベルの問題を解いて恒等式を締めくくりましょう.

４．$x+y-2z=-5, 2x-y-z=-1$ を満たすすべての x, y, z について，$px^2+qy^2+rz^2=12$ となるような定数 p, q, r の値をそれぞれ求めよ（大阪産業大）．

6.1　参考：発展学習

　つぎのような設問が与えられたとします．
【設問】a, b, c を異なる定数とし，x, y, z の間に

$$x - ay + a^2z = 0$$
$$x - by + b^2z = 0$$
$$x - cy + c^2z = 0$$

の三式が成立しているとき，$x = y = z = 0$ であることを示せ．

　方程式の未知数に x, y などが多用されているからといって，先入観を持たずに様々な視点から式を眺められるようにしましょう．

7　等式の証明

このセクションでは，等式の証明方法について学びます．基本的には，右辺が左辺と等しくなることを調べてきちんと論じることが出来ればよいわけです（論理；筋道の建て方はいろいろありますが，あとで勉強します.）さっそくですが，次の答案を調べてみましょう.

【設問】$a+b+c=0$ のとき, $2a^2+bc=(b-a)(c-a)$ を証明せよ.

《答案１》

$$
\begin{aligned}
a+b+c=0 \text{ より } c=-(a+b) \text{ なので,} \\
\text{与えられた式に代入すると,} \\
2a^2-b(a+b)=(b-a)(-a-b-a) \\
2a^2-ab-b^2=(b-a)(-2a-b) \\
2a^2-ab-b^2=2a^2-ab-b^2 \\
\text{よって, 証明された.}
\end{aligned}
$$

《答案２》

$$
\begin{aligned}
a+b+c=0 \text{ より } c=-(a+b) \text{ なので,} \\
\text{もとの式に代入すると,} \\
\text{左辺}=2a^2-b(a+b) \\
=2a^2-ab-b^2 \\
\text{右辺}=(b-a)(-a-b-a) \\
=(b-a)(-2a-b) \\
=2a^2-ab-b^2 \\
\text{ゆえに, 左辺}=\text{右辺となる.}
\end{aligned}
$$

さて，どちらか満点で，どちらかが０点です.

では，実際に等式を証明する方法について学んでゆきます．基本的には，つぎの 4 手法が定石ですが，これ以外の方法もあります．以外の方法は随時説明してゆきましょう．

I. 左辺（右辺）を変形して右辺（左辺）を導く．

II. 左辺，右辺をそれぞれ変形して同一の式にする．

III. 左辺ー右辺＝ 0 を導く．

IV. $\dfrac{\text{右辺}}{\text{左辺}} = 1$ を導く．

たとえば，先ほどの答案は定石 [II] の手法です．誤答例の「与えられた等式を変形していくやり方」は無効です．基本的には，計算のやりやすい方で導いていきますが，たいていは定石 [III] 右辺 – 左辺＝ 0 が一番使えるやり方です．知識的には，とりあえず数と式で十分です．

8 Try!

つぎの等式を証明しなさい．

(1) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$

(2) $x + y = 1$ のとき, $x^3 + y^3 = 1 - 3xy$

(3) $a+b+c=0$ のとき

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=-3abc$$

(4) $a+b+c=0, abc=0$ のとき,

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$$

(5) $a:b=c:d$ のとき

$$\frac{ac}{a^{-}c^{2}}=\frac{bd}{b^{2}-d^{2}}$$

9　応用問題

(1) $a:b:c=x:y:z$ のとき, 次の等式を証明せよ.

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$$

(2) $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ のときに $(a-1)(b-1)(c-1)=1$ をしめすことで a,b,c のうち少なくとも一つは 1 であることを示せ.

仕上げ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$ のとき, $x+y, y+z, z+x$ のうち少なくとも一つは 0 であることを証明せよ.

10　不等式の取扱説明書

　これまで何気なく二次不等式やらなにやらを解いてきましたが、「不等式」とはいったいどのようなものなのでしょうか。次の問いに明確に答えられますか？

(1) 方程式との違いは何か？

(2) 方程式と同様に移項が可能なのはなぜか？

(3) つぎの答案の誤りを指摘せよ。
不等式、

$$2a - b > c$$

において、両辺２乗して整理すると、

$$\begin{aligned} (2a-b)^2 - c^2 &> 0 \\ (2a-b+c)(2a-b-c) &> 0 \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned} 2a-b+c>0 \quad \text{かつ} \quad 2a-b-c>0, \\ \text{または}, 2a-b+c<0 \quad \text{かつ} \quad 2a-b-c<0\,\text{である。} \end{aligned}$$

この問いの誤答例のように、単純な論理であれば容易に見つけることが出来ますが、「条件」として不等式は入試問題で様々な形で出現します。思わぬ不注意が致命的になることもしばしばですので、不等式は少し丁寧に扱ってあげましょう。この不等式のセクションでは、不等式の Orthodox な証明法を扱ったあと、受験数学で常識となっている有名不等式、不等式を利用した応用問題について考察します。

11　不等式の証明—Orthodox-View

　このセクションでは、基本的な不等式の証明法を説明します。文字通り「fundamental」な手法です。
一般に、不等式 A ≧ B を示すには、次のような手段が考えられる。

I. $A - B$ を整理して導かれる式 C について $C \geqq 0$ が成り立つことを示す。

II. 絶対値や$\sqrt{\quad}$がある場合は、それぞれの辺を二乗してやると扱いやすい。

III. 有名不等式の利用→後述

IV. 凸関数定理を利用→後述

基本的には、この 4 つのパターンで大学入試を乗り切ります。等式と異なり、不等式は扱う数の範囲が広いうえに分野を問わず様々な数的現象を説明できます。したがって必然的に大学入試でも頻出分野となります。

12　”正”であること

　さて、Orthodox-View では、とりあえず A–B（右辺 – 左辺）してその計算結果が正になればよい、と示しました。では、どんな場合に正となるのか？次のそれぞれについて符号を検討してみましょう。

(1) $a > 0, b > 0$ において、$3a + b$

(2) $a > 0, 0 > b$ において、$a - b$

(3) $0 > a > b > c$ において、$(a - b)(b - c)(c - a)$

(4) $a^2 + b^2$

(5) $ab > 0$ において、$\dfrac{a + b}{ab}$

基本的には、左辺 – 右辺などの計算をして、その計算結果について、上記のように（与えられた条件を駆使して）符号の吟味を行います。二乗の形に因数分解できたりするときは、至福の瞬間と言えます。では、実際に不等式を証明していきます。

13　不等式の証明 1

(1) $a > 1, b > 1$ のとき,

$$ab + 1 > a + b$$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$

(3) $a > 0$ のとき,

$$1 + \frac{1}{2}a > \sqrt{a+1}$$

(4) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$

(5) $a > 0, b > 0$ のとき,

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

14　絶対（有名）不等式

これからしばらく、不等式に関連して、いくつかの絶対不等式（有名不等式）を扱います。Orthodox な不等式の証明方法は前回述べたとおりですが、実際に不等式を利用してさまざまな問題を解決することが出来ることがしばしばあります。実際に、数ある絶対不等式の中から入試問題で頻繁に顔を出すいくつかのものをセレクトして、不等式の意味から入試問題への応用までを追ってみましょう。なお、内容的にはレベルアップしますし、いくら高校の教科書や「チャート式」をひっくり返してみたところで出てくるものではありません。ですが、実際に入試問題をひもといてみると、あちこちで顔を出してきます。視野を広げるという意味でも早いうちに触れておくのは十分な価値があるといえましょう（必要な数学の知識は、数と式と二次関数を超えません)。ドロップアウトしないように頑張ってください。

15　相加相乗平均

先ほどの証明問題で出てきました。ひとことに相加相乗平均と言いますが、まずは言葉の意味を考えてみます。少し脱線します。

15.1　相加平均

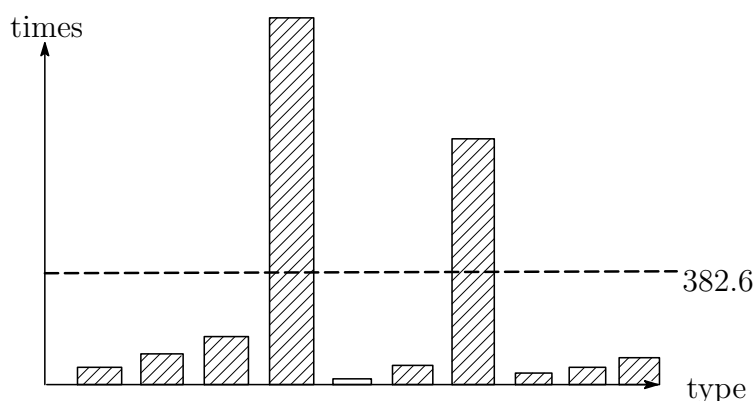
相加平均は、毎度おなじみ「平均」です。「全員分足して、総数割る」今まで意識せずに用いてきましたやつです。加えて割ることで凸凹を均す平均の取り方です。

15.2　相加平均が万能ではない！

さて、平均の求め方は、相加平均だけに他なりません。試験の成績などを管理する場合は相加平均が便利ですが、相加平均が正確なデータをはじき出せないこともしばしばあります。たとえば、次の例から、相加平均がうまく機能できていないことを確認しましょう。

細菌分裂の実験において，10 **タイプの細菌を利用する。それぞれ種類の分裂回数を計測したとき，**50,79,198,2150,3,60,1113,38,55,80 **となった。このときの，分裂回数の平均値はいくらか？**
実際に、相加平均を計算してみます。

$$\frac{50+79+\cdots+80}{10}=382.6$$

果たしてこれが妥当か？ちょっと本題からずれますが、先ほどのデータをグラフにしてみます。

平均は、382.6 となってはいても、グラフを見ればどこか正確でないことがわかると思います。実際、データを見て多いのは 2 桁近辺であり、例外的に 2 つの値が突出しているだけです。この「例外的」なデータが算出の値を引き上げてしまい、382.6 と大勢を無視したような値が出たのです。相加平均の失敗例です。

この実験では、相加平均ではない形で算出する必要があるようです。実は「統計学」といわれる分野ではさまざまな平均の算出方法があり、データに応じて様々な手法が用いられますが、ここでは本文と関係ないので省略し、この実験に対して、一つの平均算出の手法、「相乗平均」を適用します。

$$
\begin{aligned}
GeoAverage &= \sqrt[10]{50 * 79 * 198 * 2150 * 3 * 60 * 1113 * 38 * 55 * 80} \\
&= 94.42
\end{aligned}
$$

とりあえず、計算式は無視して結果だけ見ましょう。実際には、コンピュータを用いて計算します。値がググッと現実味を帯びてきました。

15.3 相乗平均

脱線が長くなりましたが、改めてここで相乗平均を定義します。

n 個の値 $(a_1, a_2, a_3, \cdots a_n)$ に対して、相乗平均値は、

$$\sqrt[n]{a_1 * a_2 * a_3 * a_4 * \cdots * a_{n-1} * a_n}$$

と定義される。

実は結構使われていたりするのです。

15.4　相加平均・相乗平均の大小関係

それでは、本題に入ります。一般に、次のようなことが言われています。

$$\text{相加平均} \geqq \text{相乗平均}$$

先ほどの例でも、相加平均の値が相乗平均の値よりも大きかったはずです。これを一般的に数式で書くならば、次のようになります。

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 * a_2 * a_3 * a_4 * \cdots * a_{n-1} * a_n}$$

ただし、$a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$はすべて正の値とする。

ただし、高校の数学では3乗根より大きな累乗根を扱うことはあまりありませんので、とりあえず、必要なのは3乗根バージョンまでです。

2乗根

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

3乗根

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$

しかも、証明できるのは、現在の時点で2乗根までです（3乗根まで到達するには、数学的帰納法→後述とよばれる証明法をマスターしないとできません。）。証明は以前行いましたが、ここでこの不等式を扱う上で、重要なことを確認しておきましょう。

$$a, b, c \cdots \text{はいずれも正の数である。}$$

これは大変重要です（大小関係を崩さないために）。確認できたら、実際に応用していきます。

15.5　使ってみよう

【設問】a, b, c はいずれも正の数とする。次の不等式を証明せよ。

(1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqq 4$

(2) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 8$

15.6　チャレンジ

a, b, c, d はいずれも正の数とする。

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

を示せ（$Hint$：二段階相加相乗）。

15.7 応用問題

1.$x > 0$ とする。$x + \dfrac{1}{x}$ の最小値を求めよ。

2.$x > 0$ とする。$f(x) = x + \dfrac{12}{x+1}$ の最小値を求めよ。

16　コーシー・シュワルツの不等式

早速ですが …

$$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

を証明せよ。また、いかなる場合に等号が成立するか。

実際には、相加相乗平均の場合と同様、n 個の数にまで拡張できます。ただし、高校の範囲では、３つのバージョン、

$$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

までで大丈夫です。

さて、実際にこの不等式がどうして「有名」なのか、名前が残るほど重要なものなのかについてつっこむのはこの講義の本意ではありません [1]。ここでは、どのようにそれを応用するかがポイントとなります。

---

[1]実際には数ベクトル空間の内積という概念が必要で、正確に理解できるためには大学レベルの数学が必要となります。

ただし、初等的なものについては、数学Ｂ「ベクトル」で扱う範囲です。

16.1　応用してみよう

【問題１】x, y が、$x^2 + y^2 = 1$ をみたすとき、

$$P = x + 2y$$

の最大値と最小値を求めよ。

【問題２】x, y, z が、$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ をみたすとき、

$$P = 3x + 4y + 5z$$

の最大値と最小値を求めよ。

【問題３】x, y, z が、$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ をみたすとき、

$$P = xy + yz + zx$$

の最大値と最小値を求めよ。

【問題４】$x \geqq 0, y \geqq 0$ で、$x + y = 1$ のとき、

$$P = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

の最大値を求めよ。

16.2　おまけ

おまけですので授業では扱いませんが、興味のある人はチャレンジしてみてください（持ってくれば採点します）。なお、ハマりすぎるのも良くないので、ほどほどに。

【チャレンジ】すべての正の実数 x, y について、

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x + y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ（東京大学文系）。

17　数学の基礎文法３

さて、論証の授業も後半戦に入りました。さて、いったん数学特有の言葉遣いの勉強に戻りましょう。

17.1　否定すること

このセクションでは、否定の仕方を学びます。簡単に言えば、否定というのは、例えばAという事実があって、「Aじゃねえよ！」ということです。しかし、数学ではしばしば「Aじゃねえよ！→じゃあ何なんだ？」というところまで示してはじめてAの否定が成立します。なお、否定の記号は、事実の上に $\overline{}$ をつけて表します。A という事実の否定なら、$\overline{A}$とかき、「エーのバー」と読みます。「君を愛してる」を否定するのならば、$\overline{\text{君を愛してる}}=$ 君が嫌い。さて、否定の具体例を挙げてみます。

- 「Aさんは男性」の否定→「Aさんは男性でない」→「Aさんは女性」
- 「$\overline{x>2}$」→「$x \leqq 2$」

数式が絡む場合もあります。ある x の範囲を否定するのならば、「その範囲以外」を出せばよいのです。練習しましょう。
【設問】次に挙げる事実を否定せよ。

- $x \geqq 2$
- $-3<x<2$
- 「Aさんは、東京都民かつ男性である」
- 「Aさんは、武蔵野市民または三鷹市民」

さて、Aさんの事実の否定はできますか？

17.2 ド・モルガンの法則＝「かつ」「または」の否定

「かつ」と「または」でくっつけられた事実を否定するのはちょっと大変です。まだ先ほどの例であれば簡単ですが、「$x > 3$ かつ $x < 5$」というのを否定せよ、ときたら？

【設問】次の問いに答えよ。

(1) $x > 3$ かつ $x < 5$ を数直線で図示せよ。

(2) $x > 3$ かつ $x < 5$ を否定せよ。

(3) $x \leqq 5$ または $x \geqq 8$ を数直線で図示せよ。

(4) $x \leqq 5$ または $x \geqq 8$ を否定せよ。

(5) ド・モルガンの法則

$$\overline{\mathrm{A}\text{かつ}\mathrm{B}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{A}}\text{または}\overline{\mathrm{B}} \qquad \overline{\mathrm{A}\text{または}\mathrm{B}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{A}}\text{かつ}\overline{\mathrm{B}}$$

の成立を、上の問題で確認せよ。

18　逆・裏・対偶

$$【命題 A】\qquad p \Rightarrow q$$

が成立しているとします。このとき、「逆」「裏」「対偶」という概念が定義できます。

18.1　逆

$$q \Rightarrow p$$

これを、【命題 A】の逆と呼びます。位置を「逆」にしたものです。

18.2　裏

$$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$$

これを、【命題 A】の裏と呼びます。位置をそのままにに、「事実を裏返したもの」とイメージします。

18.3　対偶

$$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$$

これを、【命題 A】の対偶と呼びます。言ってみれば、「裏」の「逆」(逆の裏) です。

18.4　真偽のほどは？

　さて、最初に与えられた命題が真であるとしても、逆や裏が真であるかどうかはわかりません。実際に吟味する必要があります。実際に練習してみましょう。
【設問】次の命題の逆・裏・待遇をつくり、その真偽を調べよ。

(1) $x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$

(2) 自然数 n について、n は 6 の約数 $\Rightarrow$ n は 12 の約数

18.5　対偶を用いた証明

　次の証明にチャレンジしましょう。
【設問】整数 n の平方が偶数ならば、n は偶数であることを示せ。

　「普通に証明すると意外に難しい」と思ったら、即対偶をとれ、が鉄則です。対偶をとるとあっさりとうまくいくことがあります。
【練習問題】整数 m, n について、次の命題を証明せよ。

$m^2 + n^2$が奇数ならば、mn は偶数である。

19　背理法

　ある命題を証明するのに、「それが成り立たないと仮定すると矛盾する。したがって、その命題は成立するはずだ」という論法を背理法といいます。例えば、**「ゼロで割ってはならないことを証明せよ。」（数学の大原則）**これを背理法によって証明します。

任意の実数 A を 0 で割ることができると仮定すると …

　これが背理法です。論理の手順としては、命題の記述の様式によって、おおまかに次の二つに分類できます。

(1) 成立命題：成立しないことを仮定し、矛盾を暴く。よって、成立する！

(2) 不成立命題：成立することを仮定し、矛盾を暴く。よって、成立しない！

では、まずはお手並み拝見。

【お手並み拝見１】正の数 a, b について、$a^2 + b^2 > 50$ ならば、a, b の少なくとも一方は 50 以上であることを示せ。

　では、つぎにオーソドックスな問題を３題ほど。
【オーソドックス１】$\sqrt{6}$が無理数であることを利用して, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$が無理数であることを証明せよ。

【オーソドックス２】a, b, c はいずれも整数とする。次のそれぞれの命題を証明せよ。

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ ならば、a, b, c のうち少なくとも一つは偶数である。

(2) $a^2 + b^2 = c^2$ ならば、a, b のうち少なくとも一つは 3 の倍数である。

大丈夫でしょうか？それでは、あまりにも有名問題ですが、難関大学（九州大、慶應大、北海道大、東北大など）でもしょっちゅう顔を出す問題（教科書にも必ず例題として載っているのにわざわざ出題するということは、受験生にたいする警鐘なのかもしれません）を一題解いてみましょう。

【有名問題】$\sqrt{2}$が無理数であることを証明せよ。

まさに、論証力を鍛える良問中の良問です。難関大のレベルとしてふさわしいレベルです。これが$\sqrt{3}$となると、さらに難しくなります。意欲のある人は、このプリントの裏にやってみるべし（今年もどこかの難関大が出題するはず･･･）。

【有名問題２】a, b が奇数ならば、二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は整数解を持たないことを示せ。